

منظومات المحاور المتحركة

(Moving Coordinate Systems)

1-7 تمهيد : الحركة الإنسحابية لمنظومة المحاور الإحداثية

(Translational Motion of Coordinate Systems)

عندما ندرس حركة جسم ونحدد موضعه بمتجه $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x,y,z)$ فإننا ننسب المركبات (x,y,z) لمنظومة محاور ox و oy و oz نفترض أنها ثابتة أو ساكنة. إلا أننا في كثير من الحالات نضطر لتعيين موضع جسم بالنسبة لمنظومة محاور متحركة، كأن نعين موضع جسم بالنسبة للأرض التي تدور بدورها حول الشمس. نتساءل هنا: هل يمكن لمراقب على سطح الأرض ويدرس حركة جسم على سطحها أن يستخدم قوانين نيوتن التي يفترض أنها صحيحة من وجهة نظر مراقب مرتبط بمنظومة محاور عطالية ساكنة بشكل مطلق؟ ما هو تأثير حركة الوسط الذي يوجد فيه هذا المراقب على حكمه على الطريقة التي سيتحرك بها الجسم بالنسبة له؟

لذا سندرس في هذا الفصل تأثير حركة الوسط (أي منظومة المحاور الإحداثية) على جسم متحرك فيه، وكيف تتغير قوانين الحركة تبعاً لذلك. وسنربط بين حركة الجسم بالنسبة لمراقب ثابت بحركته بالنسبة لآخر مرتبط بالمنظومة المتحركة. لنفترض إذاً أن لدينا منظومة محاور إحداثية $oxyz$ متحركة بالنسبة لمنظومة محاور ثابتة $OXYZ$ ، كما في الشكل (1-7)، فنلاحظ أن موضع أي جسيم P بالنسبة للمحاور المتحركة يرتبط بموضعه بالنسبة للمحاور الثابتة بالعلاقة:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{R}_0 \quad (1-7)$$

حيث تدل \mathbf{R} و \mathbf{r} على متجه موضع الجسيم بالنسبة للمحاور الثابتة والمتحركة، على الترتيب، بينما \mathbf{R}_0 متجه موضع مبدأ الإحداثيات المتحركة بالنسبة للثابتة. إذا اعتبرنا الحركة الإنتقالية (translational motion) للمحاور المتحركة، عندئذ نجد سرعة وتسارع الجسم في المنظومتين باشتقاق (1-7) مرتين، فنحصل على:

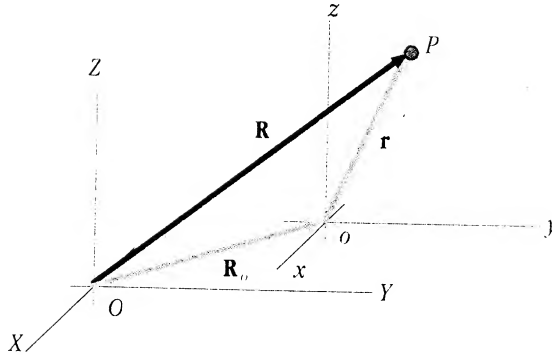
(2-7)

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{V}_0$$

و

(3-7)

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{a}_0$$



الشكل (1-7)

نلاحظ من العلاقة (3-7) أنه إذا كانت المنظومة المتحركة تسير بسرعة ثابتة ، أي

$\mathbf{a}_0 = 0$ عندئذ يكون:

(4-7)

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

أي أن تسارع الجسم واحد في كلا المنظومتين.
هذا صحيح فقط في حالة الحركة الإنتقالية للمحاور المتحركة.

2-7 القوى العطالية (Inertial Forces)

نعلم من قانون نيوتن الثاني أن:

$$\mathbf{F}_T = m \mathbf{a}$$

بتعويض \mathbf{a} من (3-7) نجد:

(5-7)

$$\mathbf{F}_T = m \mathbf{a} + m \mathbf{a}_0$$

أو

(6-7)

$$\mathbf{F}_T - m \mathbf{a}_0 = m \mathbf{a}$$

فحتى يبقى قانون نيوتن صحيحاً في المنظومتين أي أن $F_T = ma = ma$ ، يجب أن يكون $a_0 = 0$ ، أي يجب أن تتحرك المنظومة المتحركة بسرعة ثابتة بالنسبة للمنظومة الثابتة. نقول عندها إن قوانين نيوتن **لا متغيرة** (invariant).

إذا كانت حركة منظومة المحاور تتم بسرعة متغيرة عندئذ نكتب قانون نيوتن الثاني بالصورة التالية:

$$(7-7) \quad "F" = ma$$

حيث وضعنا:

$$(8-7) \quad "F" = F_T - ma_0$$

مما يعني أنه علينا إضافة الحد $-ma_0$ إلى محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم، و يمثل قوة وهمية ناتجة عن حركة المحاور الإحداثية فقط تدعى **قوة عطالية** (Inertial Force).

يجدر التنويه إلى أننا سنستخدم المعادلة (5-7) عند دراسة حركة الأجسام بالنسبة للأرض، أي يجب اعتبار القوة العطالية الناتجة عن دوران الأرض. سنرى كيف يؤثر هذا على شكل الأرض أو مسار القذائف وغير ذلك من حركات الأجسام بالقرب من سطح الأرض.

7-3 الحركة الدورانية لمنظومة المحاور الإحداثية

(Rotational Motion of Coordinate Systems)

درسنا في الفقرة السابقة الحركة الانتقالية لمنظومة المحاور الإحداثية بحيث تبقى ox و oy و oz موازية لكل من OX و OY و OZ ، على الترتيب. أما في هذه الفقرة فندرس الحركة الدورانية فقط للمحاور المتحركة بالنسبة للثابتة، ونفترض للسهولة أن مبدأيهما منطبقان على بعضهما، كما في الشكل (2-7)، عندئذ يكون بُعد أي جسم عن O واحداً، أي أن:

$$(9-7) \quad R = r$$

حيث:

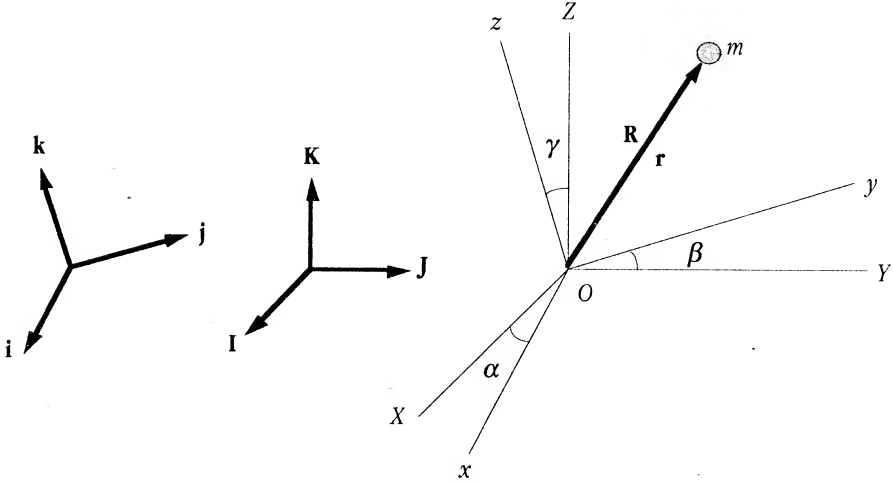
$$\mathbf{R} = I + J + K$$

3

(11-7)

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk$$

حيث (I,J,K) متجهات الوحدة على المحاور الإحداثية الثابتة OXYZ بينما (i,j,k) متجهات الوحدة على منظومة المحاور الدوارة ox,yz، كما في الشكل (2-7).



الشكل (2-7)

يمكن الحصول على العلاقات بين مركبات \mathbf{R} و \mathbf{r} بضرب (10-7) و (11-7) عددياً بـ \mathbf{i} أولاً، فنجد:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{R} = X(\mathbf{i} \cdot \mathbf{I}) + Y(\mathbf{i} \cdot \mathbf{J}) + Z(\mathbf{i} \cdot \mathbf{K})$$

و:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{r} = x$$

بما أن $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ يكون :

$$x = X(\mathbf{i} \cdot \mathbf{I}) + Y(\mathbf{i} \cdot \mathbf{J}) + Z(\mathbf{i} \cdot \mathbf{K})$$

بإعادة العملية بالنسبة لـ \mathbf{j} ثم \mathbf{k} نجد العلاقات التالية:

$$(12-7) \quad \begin{cases} x = X(\mathbf{i} \cdot \mathbf{I}) + Y(\mathbf{i} \cdot \mathbf{J}) + Z(\mathbf{i} \cdot \mathbf{K}) \\ y = X(\mathbf{j} \cdot \mathbf{I}) + Y(\mathbf{j} \cdot \mathbf{J}) + Z(\mathbf{j} \cdot \mathbf{K}) \\ z = X(\mathbf{k} \cdot \mathbf{I}) + Y(\mathbf{k} \cdot \mathbf{J}) + Z(\mathbf{k} \cdot \mathbf{K}) \end{cases}$$

بضرب (10-7) و (11-7) عددياً بـ \mathbf{I} ثم \mathbf{J} ثم \mathbf{K} ، على الترتيب، نجد بنفس الطريقة أن:

$$(13-7) \quad \begin{cases} X = x(\mathbf{I} \cdot \mathbf{i}) + y(\mathbf{I} \cdot \mathbf{j}) + z(\mathbf{I} \cdot \mathbf{k}) \\ Y = x(\mathbf{J} \cdot \mathbf{i}) + y(\mathbf{J} \cdot \mathbf{j}) + z(\mathbf{J} \cdot \mathbf{k}) \\ Z = x(\mathbf{K} \cdot \mathbf{i}) + y(\mathbf{K} \cdot \mathbf{j}) + z(\mathbf{K} \cdot \mathbf{k}) \end{cases}$$

يمثل الضرب العددي $(\mathbf{i} \cdot \mathbf{I})$ أو $(\mathbf{i} \cdot \mathbf{J})$ أو $(\mathbf{i} \cdot \mathbf{K})$ ، الخ، جيب تمام (cosine) الزاوية المحصورة بين المحاورين المعنيين. ففي حالة كل من $(\mathbf{i} \cdot \mathbf{I})$ و $(\mathbf{j} \cdot \mathbf{J})$ و $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{K})$ نكتب:

$$(14-7) \quad \begin{cases} \mathbf{i} \cdot \mathbf{I} = \cos \alpha \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{J} = \cos \beta \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{K} = \cos \gamma \end{cases}$$

تسمى الزوايا α و β و γ جيوب تمام التوجيه (direction cosines) للمحاور المتحركة بالنسبة للثابتة.

يمكن الربط بين سرعة الجسم بالنسبة لمراقب موجود في منظومة المحاور المتحركة بسرعه بالنسبة لمراقب موجود في منظومة المحاور الثابتة. فنجد أولاً سرعته بالنسبة للمحاور الثابتة باشتقاق العلاقة (9-7):

$$(15-7) \quad \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{dX}{dt}\mathbf{I} + \frac{dY}{dt}\mathbf{J} + \frac{dZ}{dt}\mathbf{K} = D_F\mathbf{R}$$

حيث يدل الرمز $d\mathbf{R}/dt = D_F\mathbf{R}$ على عملية اشتقاق بالنسبة للمحاور الثابتة (Fixed) (أي معدل تغير المتجه بالنسبة لمراقب موجود في تلك المنظومة). وأما سرعته بالنسبة للمحاور المتحركة (Moving) فنجدها باشتقاق العلاقة (10-7):

(16-7)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} = D_M \mathbf{r}$$

حيث يدل الرمز $D_M \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}$ على عملية اشتقاق بالنسبة للمحاور المتحركة. نربط بين \mathbf{v} و \mathbf{V} بملاحظة أن $\mathbf{R} = \mathbf{r}$ ، أي أن:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) + (x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt})$$

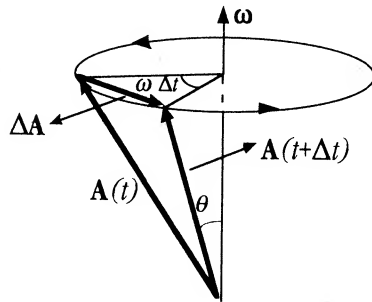
حيث يدل الرمز $d\mathbf{i}/dt$ مثلاً على معدل تغير متجه وحدة المحور ox في المحاور المتحركة بالنسبة لمراقب موجود في منظومة المحاور الثابتة. نكتب العلاقة الأخيرة على النحو:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + (x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}) \quad (17-7)$$

من الواضح أن طول كل من \mathbf{i} و \mathbf{j} و \mathbf{k} لا يتغير مع دوران المنظومة xyz لكن اتجاه كل واحد سيتغير. لذا نحدد فيما يلي مشتق متجه ثابت بالقيمة متغير بالاتجاه.

7-4 مشتق متجه ثابت القيمة ومتغير الاتجاه

ليكن \mathbf{A} متجهاً ثابت الطول إلا أن اتجاهه يتغير نتيجة دورانه بسرعة زاوية ω حول محور ما، كما في الشكل (3-7).



الشكل (3-7)

بكتابة \mathbf{A} في اللحظة t بالشكل $\mathbf{A}(t)$ واللحظة $t+\Delta t$ بالشكل $\mathbf{A}(t+\Delta t) = \mathbf{A}(t) + \Delta \mathbf{A}$ ، يكون:

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)$$

ونلاحظ من الشكل (3-7) أن:

$$\Delta A = (A \sin \theta)(\omega \Delta t)$$

ومنه:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = A \omega \sin \theta$$

حيث θ الزاوية بين \mathbf{A} و $\boldsymbol{\omega}$ ، فنكتب:

$$(18-7) \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

حيث نستنتج من الشكل (3-7) أن اتجاه $\Delta \mathbf{A}$ هو باتجاه $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$ وليس باتجاه $\mathbf{A} \times \boldsymbol{\omega}$! نعود الآن الى العلاقة (17-7)، ونعوّض عن $d\mathbf{i}/dt$ و $d\mathbf{j}/dt$ و $d\mathbf{k}/dt$ ، فنجد:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

أي أن:

$$(19-7) \quad \mathbf{V} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

بما أن $\mathbf{v} = D_M \mathbf{r}$ و $\mathbf{V} = D_F \mathbf{r}$ ، لذلك نكتب (19-7) بالشكل:

$$(20-7) \quad \mathbf{V} = D_F \mathbf{r} = D_M \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

نُستخدم (20-7) لتعريف مؤثر الاشتقاق D_F (differential operator) بالعلاقة:

$$(21-7) \quad D_F \equiv D_M + \boldsymbol{\omega} \times$$

يستفاد من هذا المؤثر لإيجاد العلاقة بين مشتق متجه ما في منظومة محاور ثابتة ومشتقه في منظومة محاور تدور حول الأولى بسرعة زاوية $\boldsymbol{\omega}$.
تتضح سهولة استخدام D_F عندما نربط تسارع جسم في منظومة ثابتة بتسارعه في منظومة تدور حولها، فنكتب من (21-7) مباشرة:

$$(22-7) \quad \mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = D_F^2 \mathbf{r} \equiv (D_M + \omega \times)(D_M + \omega \times) \mathbf{r}$$

لكن

$$\begin{aligned} (D_M + \omega \times)(D_M + \omega \times) \mathbf{r} &= D_M^2 \mathbf{r} + \omega \times (D_M \mathbf{r}) + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + D_M (\omega \times \mathbf{r}) \\ &= D_M^2 \mathbf{r} + 2\omega \times (D_M \mathbf{r}) + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + (D_M \omega) \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

بوضع:

$$\mathbf{a} = D_M^2 \mathbf{r}$$

و

$$\mathbf{v} = D_M \mathbf{r}$$

و

$$(لماذا؟) \quad \dot{\omega} = D_F \omega = D_M \omega$$

حيث \mathbf{v} و \mathbf{a} سرعة وتسارع الجسم بالنسبة للمنظومة المتحركة و ω التسارع الزاوي لمنظومة المحاور المتحركة بالنسبة للثابتة، تصير العلاقة (22-7):

$$(23-7) \quad \mathbf{a} = \mathbf{a} + 2\omega \times \mathbf{v} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + \dot{\omega} \times \mathbf{r}$$

إذا كان مبدأ منظومة المحاور الدوارة يتحرك انسحابياً بتسارع \mathbf{a}_0 بنفس الوقت الذي تدور فيه، فيجب إضافة \mathbf{a}_0 للطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة.

5-7 الحركة الدورانية لمنظومة المحاور وقوانين نيوتن

ندرس في هذه الفقرة الصيغة التي ينتهي إليها قانون نيوتن الثاني من وجهة نظر مراقب موجود في منظومة محاور متحركة (أي وسط متحرك) xyz بالنسبة لمنظومة محاور ثابتة $OXYZ$ ، عندما يطبقه على جسم متحرك في هذا الوسط. نفترض للسهولة أن المنظومة تتحرك بشكل دوراني فقط بسرعة زاوية ω بحيث يبقى مبدأها منطبقاً على مبدأ منظومة المحاور الثابتة، عندئذ نكتب من قانون نيوتن

الثاني عندئذ:

(24-7)

$$\mathbf{F}_T = m\mathbf{a}$$

بتعويض \mathbf{a} من (23-7) نجد:

(25-7)

$$\mathbf{F}_T = m(\mathbf{a} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r})$$

أو:

(26-7)

$$\mathbf{F}_T - [2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}] = \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

حيث تدل " \mathbf{F} " على القوة العطالية المؤثرة على الجسم بالنسبة لمراقب موجود في منظومة المحاور الإحداثية المتحركة (الدوارة) وتتألف من أربعة حدود هي:

1- \mathbf{F}_T وهي محصلة القوى الخارجية الفعلية المؤثرة على الجسم.

2- $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ يطلق على هذا الحد اسم قوة كوريوليس (Coriolis Force) وهي معدومة طبعاً إذا كان الجسم لا يتحرك في المنظومة الدوارة (أي إذا كان $\mathbf{v}=0$).

3- $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ يدعى هذا الحد القوة الطاردة (أو النابذة) (centrifugal force) ولا يمثل قوة خارجية طبعاً بل يظهر لمراقب موجود في منظومة المحاور المتحركة فقط الذي يقرر عند متابعته لحركة الجسم في هذه المنظومة أن هناك قوة كهذه تؤثر على الجسم متجهةً بعيداً عن المبدأ، إذ نلاحظ من الشكل (4-7) أن:

$$|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}| = \omega r \sin \theta$$

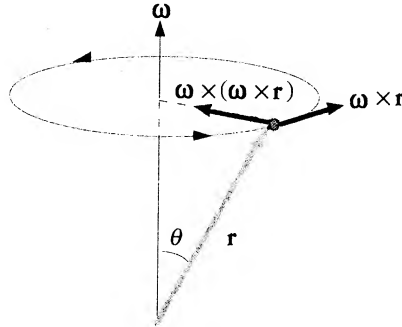
من ثم

(27-7)

$$|\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})| = \omega^2 r \sin \theta$$

يمثل الحد $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ التسارع المركزي المعروف الذي يتجه نحو مركز الدوران (انظر الشكل (4-7)). من ثم تصبح القوة $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ مساوية ومعاكسة للقوة المركزية، أي متجهةً بعيداً عن المبدأ، لهذا يُطلقُ عليها المراقبُ الموجود في المنظومة المتحركة اسم القوة الطاردة، وهي كما أسلفنا ليست قوة حقيقية بل ناتجة عن دوران منظومة المحاور التي يتحرك الجسم فيها.

$-m\omega \times r$ يسمى هذا الحد القوة العرضية (أو المستعرضة) (Transverse Force) لأنها عمودية على السرعة دوماً. وتساوي الصفر إذا دارت المنظومة المتحركة بسرعة زاوية ثابتة، كما هي الحال في دوران الأرض مثلاً.



الشكل (4-7)

□ مثل 1-7

تدور اسطوانة موسيقية حول محور شاقولي عمودي عليها يمر من مركزها بينما تسير نملة على قطر للإسطوانة منطلقاً من مركزها بسرعة ثابتة v بالنسبة للإسطوانة ومتجهة نحو محيطها. (أ) حدد القوى المؤثرة على النملة بالنسبة لمراقب جالس على الإسطوانة (!) ويدور معها. (ب) جد المسافة التي ستقطعها النملة على الإسطوانة قبل أن تبدأ بالإنزلاق عليها مع العلم أن معامل الإحتكاك بينهما هو μ .

الحل: نختار منظومة محاور متحركة ينطبق فيها ox على خط سير النملة، كما في الشكل (5-7).

بفرض أن خط سير النملة على الاسطوانة ينطبق على محور السينات، نكتب:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} = vt\mathbf{i}$$

و

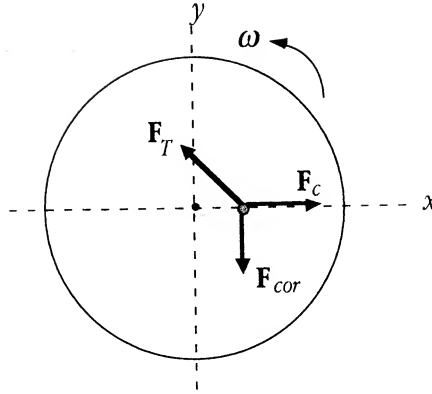
$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} = v\mathbf{i}$$

و

$$\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{i} = 0$$

كما أن:

$$\omega = \omega \mathbf{k}$$



الشكل (5-7)

نلاحظ أن محصلة القوى الخارجية المؤثرة على النملة هي:

$$\mathbf{F}_T = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_r$$

حيث يتجه الوزن $m\mathbf{g}$ ورد الفعل \mathbf{N} عمودياً على الاسطوانة (ومستوي الورقة) وهما متساويان ومتعاكسان، أي أن:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} = 0$$

كما أن قوة الاحتكاك بين النملة والاسطوانة:

$$F_r \leq \mu N = \mu mg$$

بينما تعطى قوة كوريوليس بـ :

$$\mathbf{F}_{cor} = -2m\omega \times \mathbf{v} = -2m\omega v \mathbf{j}$$

والقوة الطاردة:

$$\mathbf{F}_c = -m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = -m\omega^2 x \mathbf{i}$$

بما أن النملة تسير بسرعة ثابتة بالنسبة للأسطوانة فيجب أن يكون:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{cor} + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_r = 0$$

أي أن :

$$\mathbf{F}_r = m\omega^2 x\mathbf{i} + 2m\omega v\mathbf{j}$$

نلاحظ أن النملة ستبدأ بالإنزلاق على الإسطوانة عندما تصل قوة الاحتكاك بينهما إلى أكبر قيمة لها، أي عندما:

$$F_r = \mu mg = \sqrt{(m\omega^2 x)^2 + (2m\omega v)^2}$$

ومنه:

$$x = \frac{1}{\omega^2} \sqrt{\mu^2 g^2 - 4\omega^2 v^2}$$

□

7-6 أثر دوران الأرض على حركة الأجسام بالقرب من سطحها

نعتبر في هذه الفقرة حركة جسم بالقرب من سطح الأرض التي تدور حول محورها بسرعة زاوية ω . فنكتب معادلة حركة الجسم من (7-26) بالشكل:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_T - [2m\omega \times \mathbf{v} + m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + m\dot{\omega} \times \mathbf{r}]$$

حيث \mathbf{v} و \mathbf{r} تسارع وسرعة وموضع الجسم بالنسبة للأرض، على الترتيب، بينما \mathbf{F}_T محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه. نلاحظ أن الحد الأخير من الطرف الأيمن معدوم لأن ω ثابت لذا تصير العلاقة السابقة بالشكل:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_T - [2m\omega \times \mathbf{v} + m\omega \times (\omega \times \mathbf{r})] \quad (7-28)$$

7-7 الأجسام الساكنة وخط الشاقول الحقيقي وشكل الأرض

إذا كان الجسم ساكناً بالنسبة للأرض، أي أن $\mathbf{v}=0$ ، ولايخضع لأي قوة خارجية باستثناء وزنه mg ، عندئذ تصير العلاقة (7-28) على النحو:

$$m\mathbf{a} = mg - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \quad (7-29)$$

أو :

$$ma = mg_e$$

حيث :

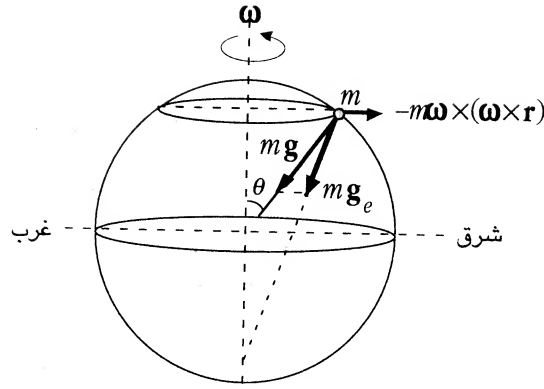
$$\mathbf{g}_e = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (7-30)$$

أي أن تسارع الجاذبية الأرضية الفعّال (*effective gravitational acceleration*) هو \mathbf{g}_e وليس \mathbf{g} والسبب في اختلافهما هو دوران الأرض حول محورها كما هو ملاحظ من (30-7)، ولو كانت $\boldsymbol{\omega} = 0$ لصارت $\mathbf{g}_e = \mathbf{g}$ بالطبع.

لعل أهم تأثير لدوران الأرض على \mathbf{g}_e هو انحراف خط الشاقول الحقيقي، الذي يمثله اتجاه \mathbf{g}_e ، عن اتجاه \mathbf{g} المار من مركز الأرض دوماً، بحسب الموقع بالنسبة لخط الاستواء. فإذا اعتبرنا جسيماً على سطح الأرض في النصف الشمالي منها لاحظنا أن وزنه $m\mathbf{g}$ يتجه نحو مركز الأرض بالفعل، إلا أن الحد $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ يتجه من الشرق للغرب، كما هو موضح في الشكل (7-6)، من ثم يكون اتجاه $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ نحو الشرق، أي أن اتجاه المحصلة \mathbf{g}_e إلى الجنوب قليلاً من مركز الأرض. بنفس الشكل يكون اتجاه \mathbf{g}_e إلى الشمال من مركز الأرض بالنسبة لجميع النقاط الواقعة في النصف الجنوبي من الكرة الأرضية.

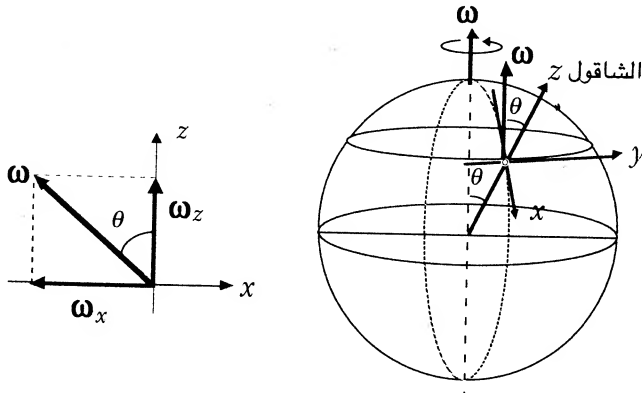
بما أن سطح البحر (كذلك السطح المستوي من الأرض) في أي مكان يكون عمودياً على اتجاه الجاذبية الأرضية الفعلي \mathbf{g}_e في ذلك الموضع، فإننا نستنتج أن الأرض تنتفخ بعض الشيء كلما اقتربنا من خط الإستواء (حيث تزداد قيمة $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ لتصبح أكبر ما يمكن هناك) بينما تصبح كروية تماماً عند القطب الشمالي والقطب الجنوبي (حيث يكون $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ مساوياً للصفر). فشكل الأرض ليس كروياً تماماً بل إن هناك بعض "التفطح" في شكلها عند خط الإستواء إلا أن هذا "التفطح" ليس كبيراً لكون الحد $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ صغيراً بالمقارنة مع \mathbf{g} .

يدعى \mathbf{g}_e الشاقول المحلي (*local vertical*) نحدد اتجاهه بخط الشاقول المؤلف من كتلة M على شكل مخروط دوراني حاد الزاوية معلق من منتصف قاعدته السفلى بحبل رفيع يستخدمه عمال البناء للتأكد من عدم ميلان الحيطان عند بنائها.



الشكل (6-7)

8-7 حركة الأجسام تحت تأثير الجاذبية الأرضية فقط قرب من سطح الأرض
لندرس حركة جسم خاضع لتأثير الجاذبية الأرضية فقط (كالمقذوفات مثلاً)،
ولنكتب معادلات حركته بالنسبة لمراقبٍ موجود على سطح الأرض. فنعتبر منظومة
محاور إحداثية $oxyz$ مرتبطة بالأرض وتدور معها بحيث يتجه ox من الشمال للجنوب
ويتجه oy من الغرب للشرق، بينما يتجه oz من الأسفل للأعلى منطبقاً على الشاقول
المحلي، كما هو موضَّح في الشكل (7-7).



الشكل (7-7)

نلاحظ من الشكل (7-7) أن ω تقع في المستوى xz كما أن مركبتها هما:

$$(31-7) \quad \begin{cases} \omega_x = -\omega \sin \theta \\ \omega_z = \omega \cos \theta \end{cases}$$

حيث θ زاوية خط العرض (colatitude).

فإذا كتبنا كل من \mathbf{r} و \mathbf{v} بالشكل:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

عندئذ يمكن كتابة مركبات المعادلة (29-7) على المحاور ox و oy و oz فنجد:

$$(32-7) \quad \begin{cases} \ddot{x} = 2\omega(\cos \theta)\dot{y} \\ \ddot{y} - 2\omega[(\cos \theta)\dot{x} + (\sin \theta)\dot{z}] \\ \ddot{z} = -g + 2\omega(\sin \theta)\dot{y} \end{cases}$$

حيث أهملنا الحدود الحاوية على ω^2 لصغرهما بالمقارنة مع بقية الحدود في (29-7).

9-7 بندول فوكولت (Focault Pendulum)

يعتبر بندول فوكولت من أفضل الأمثلة للبرهان على دوران الأرض حول نفسها وملاحظة ذلك بطريقة ممتعة ومباشرة، ويتألف من بندول بسيط عادي ولكن طوله كبير مع ما ألفناه في حالة البندول المخبري، إذ يصل لعدة أمتار أحياناً. إذا اعتبرنا بندولاً بطوله L وكتلته m ، معلقاً من نقطة ثابتة A في غرفة المختبر، كما في الشكل (8-7)، وكتبنا معادلات الحركة له كما يراها مراقبٌ موجودٌ في غرفة المختبر لوجدنا من (26-7):

$$(33-7) \quad m\mathbf{a} = \mathbf{F}_T - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

حيث :

$$\mathbf{F}_T = m\mathbf{g} + \mathbf{T}$$

فتؤول (33-7) إلى:

$$(34-7) \quad m\mathbf{a} = m\mathbf{g}_e + \mathbf{T} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

$$(31-7) \quad \begin{cases} \omega_x = -\omega \sin \theta \\ \omega_z = \omega \cos \theta \end{cases}$$

حيث θ زاوية خط العرض (colatitude).

فإذا كتبنا كل من \mathbf{r} و \mathbf{v} بالشكل:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

عندئذ يمكن كتابة مركبات المعادلة (29-7) على المحاور ox و oy و oz فنجد:

$$(32-7) \quad \begin{cases} \ddot{x} = 2\omega(\cos \theta)\dot{y} \\ \ddot{y} - 2\omega[(\cos \theta)\dot{x} + (\sin \theta)\dot{z}] \\ \ddot{z} = -g + 2\omega(\sin \theta)\dot{y} \end{cases}$$

حيث أهملنا الحدود الحاوية على ω^2 لصغرهما بالمقارنة مع بقية الحدود في (29-7).

7-9 بندول فوكولت (Focault Pendulum)

يعتبر بندول فوكولت من أفضل الأمثلة للبرهان على دوران الأرض حول نفسها وملاحظة ذلك بطريقة ممتعة ومباشرة، ويتألف من بندول بسيط عادي ولكن طوله كبير مع ما ألفناه في حالة البندول المخبري، إذ يصل لعدة أمتار أحياناً.

إذا اعتبرنا بندولاً طوله L وكتلته m ، معلقاً من نقطة ثابتة A في غرفة المختبر، كما في الشكل (8-7)، وكتبنا معادلات الحركة له كما يراها مراقبٌ موجودٌ في غرفة المختبر لوجدنا من (26-7):

$$(33-7) \quad m\mathbf{a} = \mathbf{F}_T - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

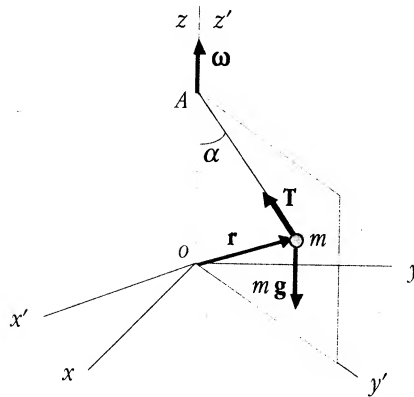
حيث :

$$\mathbf{F}_T = m\mathbf{g} + \mathbf{T}$$

فتؤول (33-7) إلى:

$$(34-7) \quad m\mathbf{a} = m\mathbf{g}_e + \mathbf{T} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

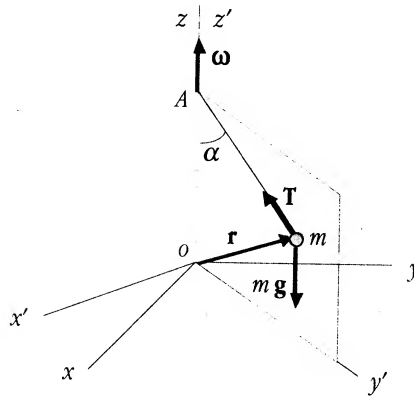
حيث أدخلنا الحد $-m\omega \times (\omega \times r)$ ضمن التسارع الفعّال g_e ، كما أن v و a هما سرعة وتسارع الكتلة m بالنسبة لغرفة المختبر طبعاً.



الشكل (8-7)

ندرس حركة البندول بطريقةٍ كيفيةٍ أولاً: فنلاحظ أنه لو كانت $\omega = 0$ ، أي أن الأرض لاتدور حول نفسها، لما كانت هناك محاور متحركة أصلاً ولصارت (7-34) مكافئة لمعادلة بندول بسيط يتحرك حركة اهتزازية بسيطة فإذا بدأ البندول اهتزازاته في مستوى معين، ليكن yz مثلاً، فإنه سيبقى في هذا المستوى دائماً وأبداً. أما عندما نأخذ دوران الأرض بعين الاعتبار، أي أن $\omega \neq 0$ ، فإننا نلاحظ أن البندول لا يخضع لقوتي الوزن والشد فقط بل لقوة كوريوليس $-2m\omega \times v$ أيضاً التي تتجه عمودياً على سرعة البندول v دوماً، مما يؤدي لاكتسابه تسارعاً عمودياً على v فيغيّر من اتجاه السرعة فقط لامن قيمتها (كما في الحركة الدائرية المنتظمة). لذا يتغير اتجاه v مع مرور الزمن باتجاه عمودي على مستو الاهتزازات yz ، بالتالي يتغير اتجاه المستوي الذي يهتز فيه البندول رويداً رويداً ويدور ببطء مع مرور الزمن. لحساب السرعة الزاوية التي يدور بها مستوي اهتزازات بندول فوكولت بالنسبة للأرض نربط بهذا المستوي منظومة محاور احداثية $ox'y'z'$ تدور معه. عندئذ نستخدم العلاقة (7-19) للربط بين سرعة الكتلة m بالنسبة لغرفة المختبر v وسرعتها بالنسبة لهذه المنظومة الجديدة v' ، ونكتب:

حيث أدخلنا الحد $-m\omega \times (\omega \times r)$ ضمن التسارع الفعّال g_e ، كما أن v و a هما سرعة وتسارع الكتلة m بالنسبة لغرفة المختبر طبعاً.



الشكل (8-7)

ندرس حركة البندول بطريقةٍ كيفيةٍ أولاً: فنلاحظ أنه لو كانت $\omega = 0$ ، أي أن الأرض لاتدور حول نفسها، لما كانت هناك محاور متحركة أصلاً ولصارت (7-34) مكافئة لمعادلة بندول بسيط يتحرك حركة اهتزازية بسيطة فإذا بدأ البندول اهتزازاته في مستويٍّ معيّن، ليكن yz مثلاً، فإنه سيبقى في هذا المستوي دائماً وأبداً. أما عندما نأخذ دوران الأرض بعين الاعتبار، أي أن $\omega \neq 0$ ، فإننا نلاحظ أن البندول لا يخضع لقوتي الوزن والشد فقط بل لقوة كوريوليس $-2m\omega \times v$ أيضاً التي تتجه عمودياً على سرعة البندول v دوماً، مما يؤدي لاكتسابه تسارعاً عمودياً على v فيغيّر من اتجاه السرعة فقط لامن قيمتها (كما في الحركة الدائرية المنتظمة). لذا يتغير اتجاه v مع مرور الزمن باتجاه عمودي على مستوي الاهتزازات yz ، بالتالي يتغير اتجاه المستوي الذي يهتز فيه البندول رويداً رويداً ويدور ببطء مع مرور الزمن.

لحساب السرعة الزاوية التي يدور بها مستوي اهتزازات بندول فوكولت بالنسبة للأرض نربط بهذا المستوي منظومة محاور احداثية $ox'y'z'$ تدور معه. عندئذ نستخدم العلاقة (7-19) للربط بين سرعة الكتلة m بالنسبة لغرفة المختبر v وسرعتها بالنسبة لهذه المنظومة الجديدة v' ، ونكتب:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}$$

أو:

$$(35-7) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}$$

حيث $\boldsymbol{\omega}'$ السرعة الزاوية لدوران مستوي اهتزازات البندول بالنسبة للمختبر.
بنفس الشكل نربط بين تسارع m بالنسبة للمختبر بتسارعها بالنسبة للمنظومة $ox'y'z'$ فنكتب من (23-7):

$$(36-7) \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}$$

لكن:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g}_e + \mathbf{T} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

فيكون:

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

أو

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{g}_e + \mathbf{T} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

أي أن:

$$(37-7) \quad m\mathbf{a}' = m\mathbf{g}_e + \mathbf{T} - 2m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}) - m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}'$$

لكن بحسب العلاقة المعروفة:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

فإن:

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}'(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}')$$

و

$$\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}'(\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega}')$$

نستنتج من هاتين المعادلتين ومن (37-7) والشكل (8-7) أن كل الحدود الموجودة في

الطرف الأيمن من (7-37) تقع في مستوي اهتزازات البندول ماعدا الحد الأخير $-2m(\omega + \omega') \times v$. لكن حركة البندول بالنسبة لمراقب موجود في مستوي الاهتزازات يجب أن تتم دوماً في هذا المستوي، ولذلك يجب أن يكون $\omega + \omega'$ عمودياً على هذا المستوي حتى يصبح حاصل الضرب $(\omega + \omega') \times v$ واقعاً فيه حتماً يتم هذا إذا كان:

$$\mathbf{k} \cdot (\omega + \omega') = 0$$

لكن:

$$\omega' = \omega' \mathbf{k}$$

ويحسب (7-31) فإن

$$(7-38) \quad \omega = -\omega \sin \theta \mathbf{i} + \omega \cos \theta \mathbf{k}$$

حيث θ زاوية خط العرض، لذا يكون:

$$\omega \cos \theta + \omega' = 0$$

أي أن:

$$(7-39) \quad \omega' = -\omega \cos \theta$$

نعود الآن لحل معادلات الحركة لبندول فوكولت بالتفصيل لمعرفة كيفية تحرك m التي نفترض أنها تقوم باهتزازات صغيرة السعة بحيث تبقى حركتها في المستوي xy بدون أن يتغير ارتفاعها بشكل ملموس، أي أن:

$$z \approx \dot{z} \approx \ddot{z} \approx 0$$

باستخدام المعادلة (7-33) وأخذ مركبتها على المحورين ox و oy نجد:

$$(7-40) \quad m\ddot{x} = T_x + 2m\omega\dot{y}\cos\theta$$

و

$$(7-41) \quad m\ddot{y} = T_y - 2m\omega\dot{x}\cos\theta$$

نلاحظ من الشكل (8-7) أن:

$$T_x = -(T \sin \alpha) \cos \phi$$

و

$$T_y = -(T \sin \alpha) \sin \phi$$

بما أن الحركة تتم في المستوي xy تقريباً، لذلك يكون:

$$mg = T \cos \alpha \approx T$$

كما أن:

$$\sin \alpha = \rho / l$$

و

$$\sin \phi = x / \rho$$

و

$$\cos \phi = y / \rho$$

لذا تصير المعادلتان (40-7) و (41-7) بالشكل:

$$(42-7) \quad \ddot{x} = -(g/l)x + 2\omega'y$$

و

$$(43-7) \quad \ddot{y} = -(g/l)y - 2\omega'x$$

حيث وضعنا:

$$(44-7) \quad \omega' = \omega \cos \theta$$

يمكن حل المعادلتين السابقتين بسهولة إذا انتقلنا لمنظومة محاور جديدة تدور بسرعة زاوية ω بالنسبة للمنظومة $oxyz$ (غرفة المختبر)، وبالمطبع فإن هذه المنظومة الجديدة تطابق تلك التي عرفناها سابقاً بأنها مرتبطة بمستوي اهتزازات البندول. ولذلك تصير معادلات التحويل من x إلى x' أو من y إلى y' معطاة بالعلاقتين (انظر الشكل (9-7)):

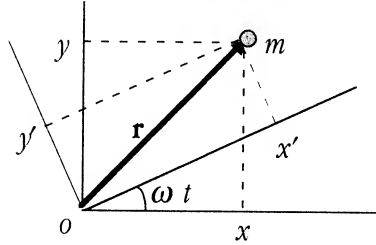
(45-7)

$$x = x' \cos \omega' t + y' \sin \omega' t$$

و

(46-7)

$$y = -x' \sin \omega' t + y' \cos \omega' t$$



الشكل (8-7)

بتعويض هاتين المعادلتين في (42-7) و (43-7) وجمعهما وإصلاح النتيجة نجد:

$$(47-7) \quad (\ddot{x}' + \frac{g}{l} x') \cos \omega' t + (\ddot{y}' + \frac{g}{l} y') \sin \omega' t = 0$$

بما أن هذه النتيجة يجب أن تكون محققة مهما يكن الزمن t ، لذلك يجب أن يكون أمثال $\sin \omega' t$ و $\cos \omega' t$ مساوياً للصفر دوماً، أي يجب أن يكون:

$$(48-7) \quad \ddot{x}' + \frac{g}{l} x' = 0$$

و

$$(49-7) \quad \ddot{y}' + \frac{g}{l} y' = 0$$

يمكن البرهان أن حركة جسيم يتحرك في المستوى $x'y'$ تتغير إحداثياته وفق المعادلتين (40-7) و (41-7) هو قطع ناقص ثابت في المستوى $x'y'$ إلا أنه يدور بسرعة زاوية ω' بالنسبة لغرفة المختبر. لذا يبدو مسار البندول بالنسبة لمراقب في الغرفة أنه قطع ناقص دوار يعطى دوره بالعلاقة:

$$(50-7) \quad T = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega \cos \theta}$$

بتعويض ω بدلالة دور حركة الأرض خلال دورانها حول نفسها، أي:

$$(51-7) \quad \omega = \frac{2\pi}{T_e} = \frac{2\pi}{24}$$

نجد دور حركة دوران مستو اهتزازات البندول:

$$(52-7) \quad T = \frac{2\pi}{\omega \cos \theta} = \frac{24}{\cos \theta} \text{ h}$$

ففي منطقة خط عرضها 45° في النصف الشمالي من الأرض يكون دور بندول فوكولت حوالي 34 ساعة، بينما يصل هذا الدور لحوالي 275 ساعة قرب خط الإستواء !
يمكن مشاهدة دوران الأرض بطريقة مباشرة بصنع بندول طويل وإزاحته جانباً مسافة صغيرة نسبياً وتحديد اتجاه اهتزازاته الابتدائي على أرض المختبر، ثم تركه ليهتز لفترة طويلة (عدة ساعات) فيلاحظ تغير هذا الاتجاه بشكل واضح. بالطبع فإن ذلك يعني حقيقة أن الأرض هي التي دارت خلال هذا الزمن. (يجدر التنويه إلى أنه يجب تجهيز بندول طويل ومركب بحيث يمكن تزويده بالطاقة التي يخسرها نتيجة الاحتكاك في كل دورة حتى لا تتخامد حركته مع مرور الوقت).

10 - 7 نظرية لارمور (Larmor Theorem)

تنص نظرية لارمور" على أنه إذا خضعت عدة جسيمات مشحونة كتلة الواحدة m وشحنتها q ، إلى مجال مغناطيسي ضعيف بالإضافة للقوى الداخلية المتبادلة بينها F_{int} ولجصلة قوى مركزية F_c ، وإذا كانت النسبة q/m هي نفسها لكل هذه الجسيمات، فإنه يمكن التخلص من تأثير المجال المغناطيسي تماماً بالانتقال إلى منظومة محاور تدور حول مركز القوة المركزية الخارجية بسرعة زاوية $\omega = -qB/2m$.
لبرهان هذه النظرية نعتبر أحد الجسيمات المشحونة ونكتب قانون نيوتن له:

$$(53-7) \quad m\mathbf{a} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{int} + q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

حيث تدل \mathbf{V} و \mathbf{a} على سرعة وتسارع الجسيم بالنسبة لمنظومة محاور ثابتة في

الفضاء، و F_c القوة المركزية الخارجية المؤثرة عليه، و F_{int} محصلة القوى الداخلية التي يخضع لها هذا الجسيم نتيجة وجود بقية الجسيمات بالقرب منه. أما $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ فهي القوة المغناطيسية الناتجة عن وجود المجال المغناطيسي \mathbf{B} . بالانتقال لمنظومة محاور $oxyz$ تدور بسرعة زاوية ω بالنسبة للمحاور الثابتة نكتب

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}$$

و

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + 2\omega \times \mathbf{v}$$

حيث \mathbf{v} و \mathbf{a} سرعة وتسارع الجسيم بالنسبة للمنظومة المتحركة.

بتعويض \mathbf{a} و \mathbf{V} في (7-53) وإصلاحها، نجد:

$$(7-54) \quad m\mathbf{a} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{int} - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + q(\omega \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} + \mathbf{v} \times (q\mathbf{B} + 2m\omega)$$

إذا افترضنا أن:

$$(7-55) \quad \omega = -\frac{q}{2m} \mathbf{B}$$

لصارت معادلة الحركة (7-54) بالشكل:

$$(7-56) \quad m\mathbf{a} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{int} - m\left(\frac{q}{2m}\right)^2 \mathbf{B} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r})$$

فإذا كان \mathbf{B} صغيراً (أي أن ω صغيرة أيضاً) لأمكن عندئذ إهمال الحد $\mathbf{B} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r})$ بالمقارنة مع الحدود الأخرى لتؤول معادلة الحركة عندئذ إلى:

$$(7-57) \quad m\mathbf{a} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{int}$$

تمثل العلاقة الأخيرة معادلة الحركة للجسيم وكأن المجال المغناطيسي غير موجودٍ على الإطلاق.

□ مثل 2-7

يسقط جسم من ارتفاع 100 m سقوطاً حراً في منطقة خط عرضها 45° . مامقدار الإنحراف الذي يعانيه بالنسبة للشاقول المحلي وفي أي اتجاه؟
الحل: نكتب معادلة حركة الجسم بالنسبة لمنظومة محاور مرتبطة بالأرض وتدور معها. فنجد من (27-7):

$$(1) \quad ma = mg_e - 2m\omega \times \mathbf{v}$$

بأخذ مركبات المعادلة (1) على كلٍ من ox و oy و oz نجد (أنظر المعادلات (32-7)):

$$(2) \quad \begin{cases} \ddot{x} = 2\omega(\cos \theta) \dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega[(\cos \theta) \dot{x} + (\sin \theta) \dot{z}] \\ \ddot{z} = -g - 2\omega(\sin \theta) \dot{y} \end{cases}$$

سنقوم بحل معادلات الحركة (1 أو 2) بطريقتين مختلفتين، كما هو آت:

(أ) طريقة التكاملات الأولية (*first Integrals*)

نكامل المعادلتين الأوليتين من (2) مرة واحدة فنجد:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\omega(\cos \theta)y + c_1 \\ \dot{y} &= -2\omega[(\cos \theta)x + (\sin \theta)z] + c_2 \end{aligned}$$

بحسب الشروط الابتدائية فإن:

$$x_0 = y_0 = 0 \text{ و } z_0 = h$$

كذلك :

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$$

لذلك يكون:

$$c_2 = 2(\omega \cos \theta)y \text{ و } c_1 = 0$$

أي أن:

$$\dot{x} = 2\omega(\cos \theta)y$$

$$\dot{y} = -2\omega[(\cos \theta)x + (\sin \theta)z] + 2\omega(\sin \theta)h$$

بتعويض y في المعادلة الثالثة من (2) وإهمال الحدود الحاوية على ω^2 لصغرها بالمقارنة مع غيرها وأخذ الشروط الابتدائية بعين الاعتبار، نجد:

$$\ddot{z} = -g$$

ومنه

$$\dot{z} = -gt$$

و

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

بتعويض z في معادلة y في (2) نجد (بعد إهمال ω^2):

$$(3) \quad \ddot{y} = 2\omega(\sin \theta)gt$$

بمكاملة المعادلة الأخيرة مرتين وملاحظة شروط البدء، نجد:

$$(4) \quad y = \frac{1}{3}\omega g(\sin \theta)t^3$$

بتعويض y في معادلة x نلاحظ أن $x \approx 0$ دوماً لإهمالنا الحدود الحاوية على ω^2 !
الآن : عند وصول الجسم إلى الأرض ($z=0$) يكون:

$$(5) \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

بتعويض t في معادلة y نجد:

$$(6) \quad y = \frac{2}{3}\omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} \sin \theta$$

كما أن $x=z=0$.

فالجسم قد انحرف نحو الشرق (اتجاه y الموجب) بالمقدار y الذي يساوي في هذه الحالة 1.5 cm تقريباً.

(ب) طريقة التشوش (perturbation method)

لنفترض أن حل المعادلة (1) في حالة عدم دوران الأرض ($\omega=0$) هو $\mathbf{r}_0(t)$ ، عندئذ نكتب الحل الحقيقي عندما $\omega \neq 0$ ، بالشكل:

$$(7) \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}_1(t)$$

حيث $\mathbf{r}_1(t)$ تصحيح صغير متناسب مع ω .
من الواضح أن $\mathbf{r}_0(t)$ يحقق المعادلة:

$$(8) \quad \ddot{\mathbf{r}}_0(t) = -\mathbf{g}_e = -g_e \mathbf{k}$$

بالتكامل نجد:

$$(9) \quad \dot{\mathbf{r}}_0(t) = -g_e t \mathbf{k}$$

و

$$(10) \quad \ddot{\mathbf{r}}_0(t) = -\frac{1}{2} g_e t^2 \mathbf{k} + \mathbf{r}(0)$$

بتعويض (8) في (1) نجد (لاحظ أننا وضعنا $\mathbf{a}=\mathbf{r}$):

$$(10) \quad \mathbf{r}_0(t) = -\frac{1}{2} g_e t^2 \mathbf{k} + \mathbf{r}(0)$$

حيث أهملنا الحدود الحاوية على ω^2 ولاحظنا أن \mathbf{r}_1 يتناسب مع ω ولذلك أهملنا $\omega \times \mathbf{r}_1$ مثلاً. بالإستفادة من (32-7) نجد:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1(t) = 2\omega(\sin \theta) g_e \mathbf{j}$$

بالمكاملة وملاحظة شروط البدء $\mathbf{r}_1(0)=0$ و $\dot{\mathbf{r}}_1=0$ ، نجد:

$$(12) \quad \mathbf{r}_1(t) = \frac{1}{3} \omega(\sin \theta) g_e t^3 \mathbf{j}$$

هذه هي نفس النتيجة التي وجدناها سابقاً، إذ أن الانحراف \mathbf{r}_1 يتم باتجاه المحور oy أي باتجاه الشرق وله نفس المقدار الذي وجدناه بالطريقة السابقة تماماً. ☐

مسائل

1-7 ترتبط كتلة m بزنبيرك k مثبت عند نقطة تهتز بشكل توافقي بسيط على محور السينات بتردد ω وسعة A اكتب معادلة حركة m بالنسبة لمنظومة محاور تتحرك مع نقطة التثبيت مفترضاً أن m تتحرك على محور السينات فقط.

2-7 تدور منظومة محاور xyz بسرعة زاوية $\omega = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ بالنسبة لمنظومة محاور ساكنة $OXYZ$ لهانفس المبدأ. ماسرعة جسيم بالنسبة لكل منظومة إذا تحدد موضعه في المنظومة المتحركة بـ $\mathbf{r} = \sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$ ؟

3-7 ماتسارع الجسيم المذكور في المسألة 2-7 بالنسبة لكل منظومة في اللحظة $t=0$ ؟

4-7 تدور منظومة محاور xyz بسرعة زاوية $\omega = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ بالنسبة لمنظومة محاور ثابتة $OXYZ$ لها نفس المبدأ. جد سرعة جسيم ساكن في الموضع $(-2, 1, 3)$ بالنسبة للمنظومة المتحركة كما يحسبه مراقب موجود في المنظومة الساكنة.

5-7 برهن أن قيمة القوة الطاردة المؤثرة على كتلة m على سطح الأرض $m\omega^2 R \sin \theta$ حيث R نصف قطر الأرض و ω سرعتها الزاوية و θ زاوية خط العرض. برهن أيضاً أن اتجاه هذه القوة بعيد عن سطح الأرض بشكل عمودي على ω .

6-7 يجري نهر عرضه 2 km بسرعة 5 km/h بالنسبة للأرض في منطقة خط عرضها 45° من الجنوب للشمال برهن أن الضفة اليسرى ستكون أعلى من الضفة اليمنى بمقدار 2.9 cm . (مساعدة: لاحظ أن محصلة القوى المؤثرة على ماء النهر يجب أن تكون عمودية على سطحه).

7-7 برهن أنه إذا دارت الأرض بسرعة زاوية $\omega^2 = 2g/R$ ، حيث R نصف قطر الأرض و g تسارع الجاذبية الأرضية، فإن وزن أي كتلة m لايعتمد على خط العرض.

8-7 يُقذف جسم نحو الأعلى عند خط عرض θ بسرعة ابتدائية v_0 . برهن أن مقدار انحرافه نحو الشرق عند ارتطامه بالأرض ثانية سيكون $4\omega v_0^3 \sin \theta / 3g^2$.

9-7 يقذف جسم نحو الأسفل من ارتفاع h عند خط عرض θ بسرعة ابتدائية v_0 . جد مقدار انحرافه نحو الشرق عند وصوله للأرض .

10-7 برهن أن الوزن الظاهري لكتلة m عند زاوية خط عرض θ نتيجة دوران الأرض هو: $\omega'^2 = m^2(g - \omega^2 R \sin^2 \theta)^2 + (\omega^2 R \sin \theta \cos \theta)^2$ ، حيث R نصف قطر الأرض.

11-7 برهن أن الزاوية بين الشاقول المحلي والشاقول الحقيقي تعطى بالعلاقة التالية:

$$\beta = \tan^{-1}(\omega^2 R \sin \theta \cos \theta) / (g - \omega^2 R \sin^2 \theta)$$

12-7 تُطلق قذيفة بسرعة ابتدائية v_0 باتجاه يصنع زاوية α مع الأفق نحو الغرب. برهن أن الزمن اللازم للقذيفة للوصول إلى أقصى ارتفاع لها (مهماً الحدود الحاوية على ω) هو: $t = (v_0 \sin \alpha / g) - (2\omega v_0^2 \sin \theta \sin \alpha \cos \alpha / g^2)$. برهن أيضاً أن أقصى ارتفاع تصل إليه القذيفة هو: $y = (v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g) - (2\omega v_0^2 \sin \theta \sin^2 \alpha \cos \alpha / g^2)$.

13-7 يُعلق خيط شاقول (plumb line) كتلته m بسقف عربة قطار متحرك. (أ) ما الشد في خيط الشاقول وانحرافه عن الشاقول المحلي إذا كان القطار يتحرك على خط مستقيم بتسارع a_0 ؟ (ب) أعد نفس السؤال في حالة كون القطار يدور على منعطف نصف قطره ρ وبسرعة ثابتة v_0 . أهمل دوران الأرض في كل حالة.

14-7 ترزح نملة بسرعة v في مسار دائري نصف قطره b على اسطوانة موسيقية تدور بسرعة زاوية ω . (أ) صف حركة النملة بالنسبة لمنظومة محاور تدور مع الأسطوانة. (ب) ما تسارع النملة بالنسبة لمنظومة محاور ثابتة في المختبر؟ اعتبر الحالتين الآتيتين: $v = b\omega$ و $v = -b\omega$.

15-7 يدور اتبوب مجوّف AOB طولها $2a$ بسرعة زاوية ω حول محور شاقولي عمودي عليه عند منتصفه وبداخله كتلة صغيرة m تنزلق فيه بدون احتكاك بادئة من السكون من نقطة تبعد مسافة b عن مركزه O . (أ) جد موضع وسرعة الكتلة m داخل الأنبوب في أي لحظة. (ب) برهن أن الزمن اللازم لتخرج m من الأنبوب يساوي:

$$t = (1/\omega) \ln[a + \sqrt{a^2 - b^2}]$$

16-7 تتحرك كتلة m على سلك دائري موجود في مستو شاقولي (رأسي) نصف قطره a ويدور حول قطر شاقولي فيه بسرعة زاوية ثابتة ω . برهن أن m ستتحرك

بشكل اهتزازي دوره $2\pi a\omega / \sqrt{a^2\omega^4 - g^2}$ ، حول وضع اتزانها مفترضاً أنه لا يوجد

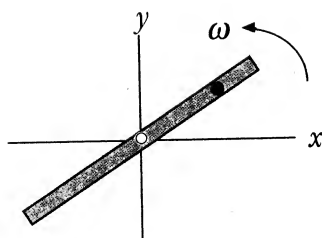
احتكاك بتاتاً . ناقش الحالة عندما $\omega = \sqrt{g/a}$.

17-7 يدور جيروسكوب مؤلف من دولاب نصف قطره r تقع كتلته M على محيطه حول محوره بسرعة زاوية $\omega_0 = \theta$ بحيث يبقى هذا المحور أفقياً دوماً وثابتاً بالنسبة لسطح الأرض. اعتبر منظومة محاور ثابتة بالنسبة لسطح الأرض بحيث ينطبق oz فيها على محور الجيروسكوب ويقع مبدؤها في مركز الدولاب، كما يقع متجه السرعة الزاوية للأرض ω في المستوي xy صانعاً زاوية α مع oz . جد مركبات العزم dN حول المبدأ o الناتج عن قوة كوريوليس المؤثرة على كتلة عنصرية dm على محيط الدولاب والمحددة بالإحداثيات القطبية (r, θ) . استخدم هذه النتيجة للبرهان أن العزم الكلي لقوة كوريوليس على الجيروسكوب هي: $N = \omega_0 \sin \alpha / 2 \mathbf{j}$.

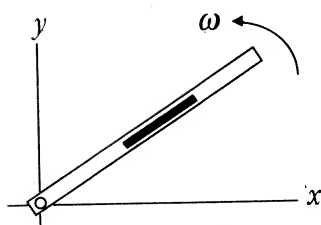
18-7 يتحرك جسيم في المستوي xy تحت تأثير قوة مركزية جاذبة $F = -kr$. ادرس حركة الجسيم مستخدماً منظومة محاور تدور حول oz بسرعة زاوية ω مختارة بحيث أن القوة المركزية (الطاردة) تساوي وتعاكس F . حل معادلات الحركة في هذه المنظومة الإحداثية وناقش أنواع الحركة الناتجة وقارن ذلك مع الحل الذي وجدته عند دراسة القوة المركزية.

19-7 ينزلق جسيم على مستو مائل طوله l وزاوية ميله α بدءاً من السكون. (أ) برهن أن الزمن اللازم لهذا الجسيم ليصل الى قعر المستوي هو $\sqrt{2l/g \sin \alpha}$ وذلك بإهمال دوران الأرض. (ب) خذ دوران الأرض بعين الاعتبار مفترضاً أن الجسيم ينزلق من الشمال للجنوب في منطقة خط عرضها θ وبرهن أن الزمن يصير في هذه الحالة مساوياً إلى $\sqrt{2l/g \sin \alpha} + [2\omega l \sin \theta \cos \alpha] / 3g$ إلى $3g$. الحدود الحادية على ω^2 أو أكثر (ج) جد سرعة الجسيم عندما يصل الى قعر المستوي. (د) مامقدار انحراف الجسيم للشرق أو للغرب عند وصوله للقعر؟

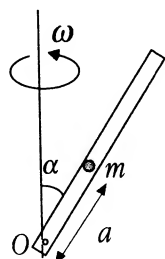
20-7 يور انبوب اسطواناني مفرغ حول محور شاقولي يصنع معه زاوية α بسرعة زاوية ثابتة ω وبداخله كتلة m يمكنها الحركة بدون احتكاك. برهن أنه إذا بدأت m حركتها من السكون على بُعد a من o ، كما في الشكل (7-10)، فإن بُعدها عن o في أي لحظة t يُعطى بالعلاقة $r = a \cosh(\omega t \cos \alpha)$.



الشكل (12-7)



الشكل (11-7)



الشكل (10-7)

21-7 يعلق إنبوب من إحدى طرفيه بينما ينزلق بداخله قضيب متجانس كتلته m وطوله l ، كما في الشكل (11-7). أكتب معادلات لاغرانج عندما يدور الإنبوب حول محور أفقي يمر من نقطة التعليق مختاراً إحداثيات عامة مناسبة.

22-7 حل المسألة 22-7 بفرض أن المستوي xy أفقي.

23-7 ادرس حركة كتلة m تنزلق بدون احتكاك داخل إنبوب مفرغ يدور في مستو شاقولي بسرعة زاوية ثابتة ω ، كما في الشكل (12-7).

24-7 برهن أن مسار جسيم يتحرك في المستوي $x'y'$ وفقاً للمعادلتين (40-7) و (41-7) هو قطع ناقص ثابت في المستوي $x'y'$ ويدور بسرعة زاوية ω بالنسبة للمحاور oxy .